Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

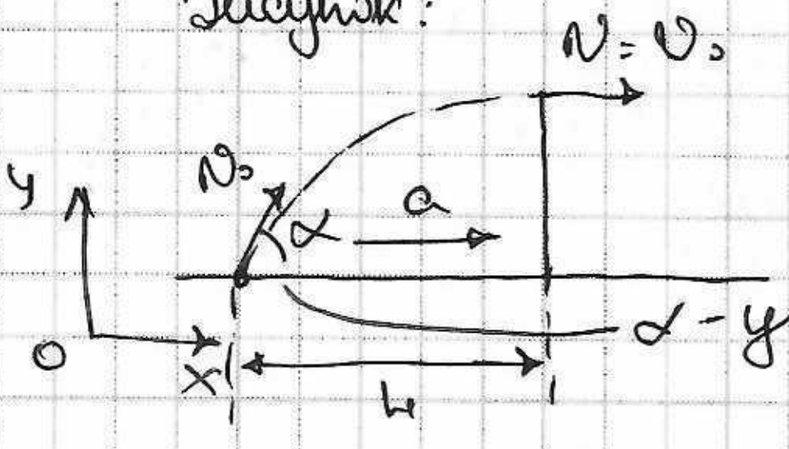
Вариант задания 2

Лист работы 1 из 5

Задача 1

Дано:
$t_0 = 0{,}8$ с
$L = 6{,}4$ м
a – const
$g = 10 \frac{м}{с^2}$

Рисунок:



Решение:

1) Заметим, что ускорение a никак не влияет на верт. составл. скорости => Введем СК OX; OY так что OX – гориз; OY – верт, СК – неподвижна, v_x; v_y – проекции скорости мяча на OX и OY соотв. Тогда:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha + at \quad (1)$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

2) Если в точке касания забора И – гориз => $v_y(t_0) = 0$, t_0 – момент касания забора =>

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt \Rightarrow \boxed{gt = v_0 \sin\alpha} \quad (II)$$

$$v_x(t_0) = v_0 = v_0 \cos\alpha + at_0 \Rightarrow \boxed{v_0(1 - \cos\alpha) = at_0} \quad (III) \quad t_0 = \frac{v_0(1-\cos\alpha)}{a}$$

3) Также мы можем записать ур-ние равноуск. движения:

$$L = v_0 \cos\alpha\, t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cos\alpha\, t - L = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{-v_0\cos\alpha \pm \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2aL}}{a}$$ – выберем корень имеющий физический смысл

$$t = \frac{-v_0\cos\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2aL}}{a} \overset{(III)}{=} \frac{v_0(1-\cos\alpha)}{a} \Rightarrow$$

$\downarrow \cdot a$ обе части

$$-v_0\cos\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2aL} = v_0 - v_0\cos\alpha$$

$$\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2aL} = v_0 \quad | \text{ возведем в квадрат}$$

$$v_0^2\cos^2\alpha + 2aL = v_0^2 \Rightarrow \boxed{2aL = v_0^2 \sin^2\alpha} \quad (IV)$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

4) Из ур-ния (II) найдем, что $V_0 \sin\alpha =$

4) Из ур-ний (II) и (IV) найдем:

$gt = V_0 \sin\alpha$ (II) $\quad 2aL = V_0^2 \sin^2\alpha$ (IV)

$g^2t^2 = V_0^2 \sin^2\alpha$ } возв в квадрат

$2aL = g^2t^2$

$$\boxed{a = \frac{g^2t}{2L} = 5\ \frac{м}{с^2}}$$

5) Из ур-ний (II) и (III) найдем:

$gt = V_0 \sin\alpha$ (II) $\quad at = V_0(1-\cos\alpha)$ (III)

$g^2t^2 = V_0^2 \sin^2\alpha$ $\quad a^2t^2 = V_0^2 - 2V_0\cos\alpha + V_0^2\cos^2\alpha$

$(a^2-g^2)t^2 = V_0^2 - V_0^2\sin^2\alpha + V_0^2\cos^2\alpha - 2V_0\cos\alpha$

$(a^2-g^2)t^2 = 2V_0^2\cos^2\alpha - 2V_0\cos\alpha$

$V_0\cos\alpha = x$

$2x^2 - 2x + \frac{(g^2-a^2)t^2}{60} = 0$

$2x^2 - 2x + 60 = 0 \rightarrow x^2 - x + 30 = 0$

$2x = 1 \pm \sqrt{1} =$

6) Запишем ур-ние равноуск. движ. по OX:

$L = V_0t + \frac{at^2}{2}$

$V_0t = L - \frac{at^2}{2}$

$V_0 = \frac{L}{t} - \frac{at}{2} = 6\ \frac{м}{с}$

Ответ: $a = 5\ \frac{м}{с}$; $V = 6\ \frac{м}{с}$

Задача 2

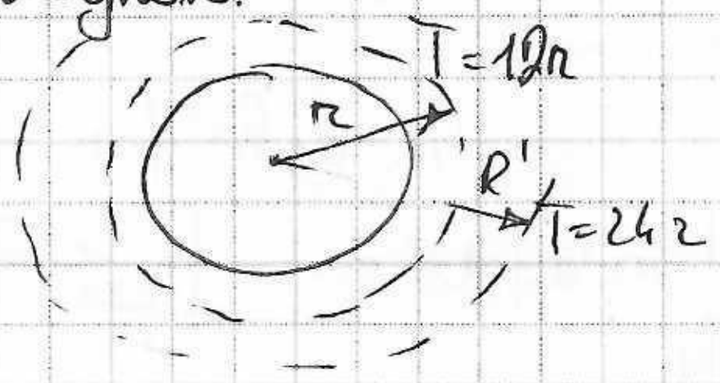
Дано:

В плоск. экватора

$T = 24\ ч$

$\tau = 12\ ч$

Рисунок:



olymp.bmstu.ru

Решение:

1) Поймем, что если второй спутник обгоняет планету и виден ровно 2 раза в сутки, то давайте зафиксируем то, как он двигается отн. центра планеты:



а) Найдем то, что он ровно 2 раза появляется над некоторой станцией, расположенной на планете, тогда если мы пересядем в С.О. вектора станция – центр планеты, то

$$\omega' = \omega_{спут} - \omega_{станции} = \frac{2\pi}{12h} = \frac{2\pi}{x} - \frac{2\pi}{24h} \quad \left| \cdot \frac{12}{2\pi} \right. \rightarrow$$

отн. станции

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{x} - \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{x} = \frac{24+12}{144 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 12}{12^2 \cdot 2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{x = 8h}$$

период обращ.

2) Запишем II й з-н Ньютона на наши спутники:

$$ma_{ц.с.} = G\frac{Mm}{r^2} \quad ; a_{ц.с.} = \omega^2 r$$

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{r^2} \quad | : m$$

$$\omega^2 r = G\frac{M}{r^2}$$

$$\omega^2 = G\frac{M}{r^3}$$

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{r^3}}$$ где M – масса планеты, r – радиус орбиты спутника, T – период обращения спутника вокруг планеты.

3) Такой же пересадкой в вектор станция – центр планеты найдем период обращения $T_{ст}$ (геостационарного спутника)

$$\omega' = \omega_{спут} - \omega_{ст} = 0 \Rightarrow \omega_{спут} = \omega_{ст} \Rightarrow T_{спут.} = T_{ст} = 24^h$$

4) Тогда с помощью ф.-лы ①:

Для первого спутника

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} = G\frac{M}{R^3}$$

Для второго спутника

$$\frac{4\pi^2}{T_2^2} = G\frac{M}{r^3}$$

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \boxed{R = r\sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}} = 3r}$$

5) Таким образом самый короткий отрезок между двумя точками на двух разных орб.-тех $|R - r| \Rightarrow l_{min} = R - r = 2r$ ✓

Ответ: $l_{min} = 2r$.

Задача 3

Дано:
$T_0 = 10$ Н
$\mu = 0,5$
$m = 2$ кг
$F(t)$
Найти $t_{разрушения}$?

Рисунок:

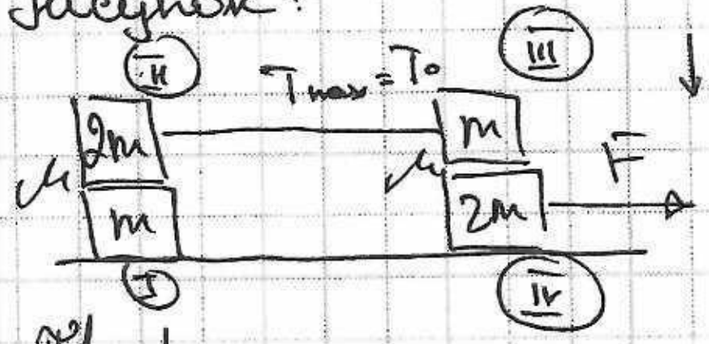
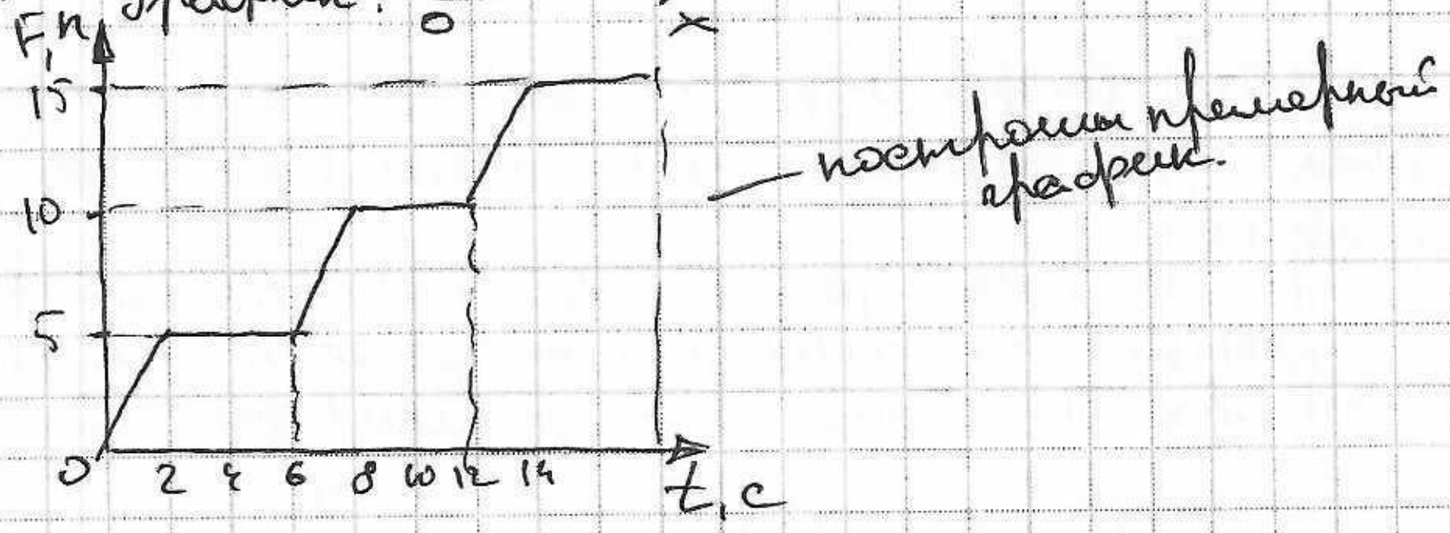


График:



Решение:

1) Пронумеруем кубики, как показано на рисунке

2) Запишем II з-н Ньютона по ОХ направленной горизонтально:

(IV): $2ma_4 = F - F_{тр34}$

(II): $2ma_3 = 2\mu mg - T$

(II): $2ma_2 = T - 2\mu mg$

(I): $ma_1 = 2\mu mg - F_{тр12}$

$\mu mg = F_{тр}$ по з-ну Кулона-Амонтона

$\downarrow N$

$\Rightarrow$ сила реакции опоры, считаем кубики жесткими.

3) Найдем, что система начнет разрушаться, когда кубики сдвинутся друг относительно друга т.е. ускорения ($a_1 = a_2 = a_3 = a_4$) не выполняется; тогда посмотрим на условие выполнимости этого условия:

$2ma = F - \mu mg$ $\quad \mu = 0,5$ $\quad 2ma = F - 0,5\mu mg$

$ma = \mu mg - T$ $\quad ma = 0,5\mu mg - T$

$2ma = T - 2\mu mg$ $\quad 2ma = T - mg$

$ma = 2\mu mg$ $\quad \{ma = mg\}$

$2ma = F - F_{тр34}$ $\quad$ (I) $\quad F \le 2T_0$

$ma = F_{тр34} - T$ $\Big\} 3ma = F - T \Rightarrow \boxed{F = 6ma = \frac{2T}{T_0}} \Rightarrow \boxed{F \le 20\text{ Н}}$

$2ma = T - F_{тр12}$ $\Big\} \Rightarrow 3ma = T \Rightarrow \boxed{a \le \frac{T_0}{3m}} = \frac{10}{6}\ \frac{м}{с^2}$ (II)

$ma = F_{тр12}$

$F_{тр12} \le 2\mu mg = mg \Rightarrow ma \le mg \Rightarrow \boxed{a \le g}$

$F_{тр34} \le \mu mg = 0,5mg$,

$ma = F_{тр34} - 3ma \Rightarrow 4ma = F_{тр34} \le 0,5mg \Rightarrow \boxed{a \le \frac{1}{8}g} = \frac{10}{8}\ \frac{м}{с^2}$ (III)

наиболее строгое ограничение на a.

olymp.bmstu.ru

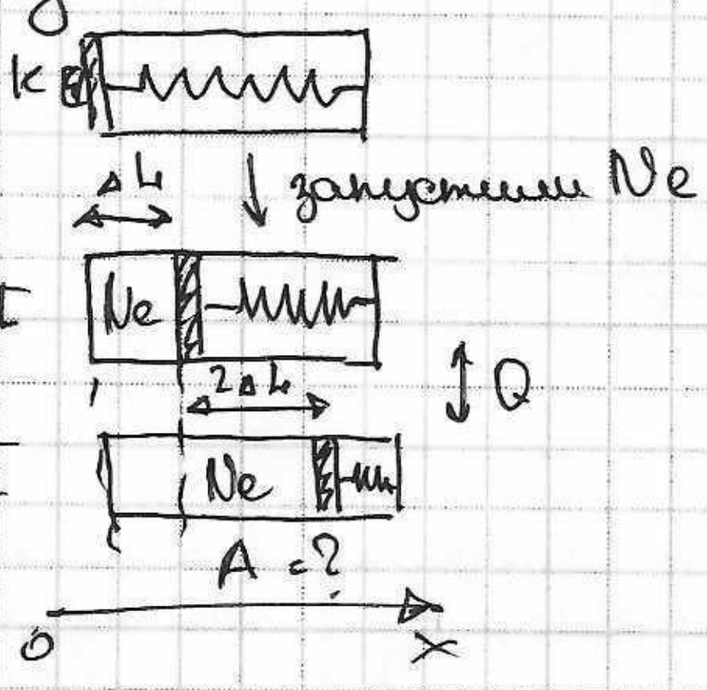
4) Выберем условия (I) и (III) т.к. они наиболее строгие и найдем:
$F = 6ma$, $a \le \frac{1}{8}g \Rightarrow F \le \frac{3}{4}mg = 15Н$ $F = 15Н$ при $t = 14с$

Ответ: система начнет разрушаться при $t = 14с$.

Задача 4

Дано:
$\Delta L = 5см$
νe
$Q = 12k\Delta x$
$A - ?$

Рисунок:



номера состояний.

Решение:

1) Найдем, что т.к. неон инертный => он молекулярный => $i = 3$

2) Буду считать газ идеальным и использовать для описания его состояния ур-ние Менделеева - Клайперона:
$$PV = \nu RT$$

3) Также заметим, что когда поршень находится в равновесии ($a = 0$) по II з-н Ньютона на OX (по оси поршня) будет выглядеть так:
$$ma = 0 = k\Delta x - P \cdot S \Rightarrow P \cdot S = k\Delta x \Rightarrow P = \frac{k\Delta x}{S} \quad (I)$$
Будем считать, что пружина подчиняется закону Гука (k - коэффициент жесткости пружины) на протяжении всей задачи.

4) Запишем ур-ние Менделеева - Клайперона для сост I:
$$PV = \nu RT = P \cdot \Delta x \cdot S \overset{(I)}{=} \frac{k\Delta x}{S} \cdot \Delta x \cdot S = k\Delta x^2 = \nu RT \quad (II)$$
По сути новое ур-ние состояния нашего газа

5) Запишем закон сохранения энергии:
I:
$$\frac{k\Delta L^2}{2} + U_1 + Q = \frac{k(3\Delta L)^2}{2} + U_2 \quad (II) \Rightarrow \frac{-k8\Delta L^2}{2} + Q = \Delta U = U_2 - U_1 \quad (III)$$
и 1 начало термодинамики:
$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + A = 1{,}5\nu R\Delta T + A \qquad U = \frac{i}{2}\nu RT$$

6) Перепишем ур-ние (III) немного в другом виде:
$$-4k\Delta L + Q = 1{,}5(k9\Delta L^2 - k\Delta L^2) = 12k\Delta L^2 \Rightarrow \boxed{Q = 16k\Delta L^2} \quad (IV)$$

4) Еще раз запишем первое начало термодинамики

$\Delta Q = \Delta U + A = 12$ кДж

$16k\Delta L^2 = 1{,}5 \cdot 8k\Delta L^2 + A$

$4k\Delta L^2 = A = \frac{\Delta Q}{4} = 3$ кДж - работа газа

Ответ: $A = 3$ кДж.

Задача 5

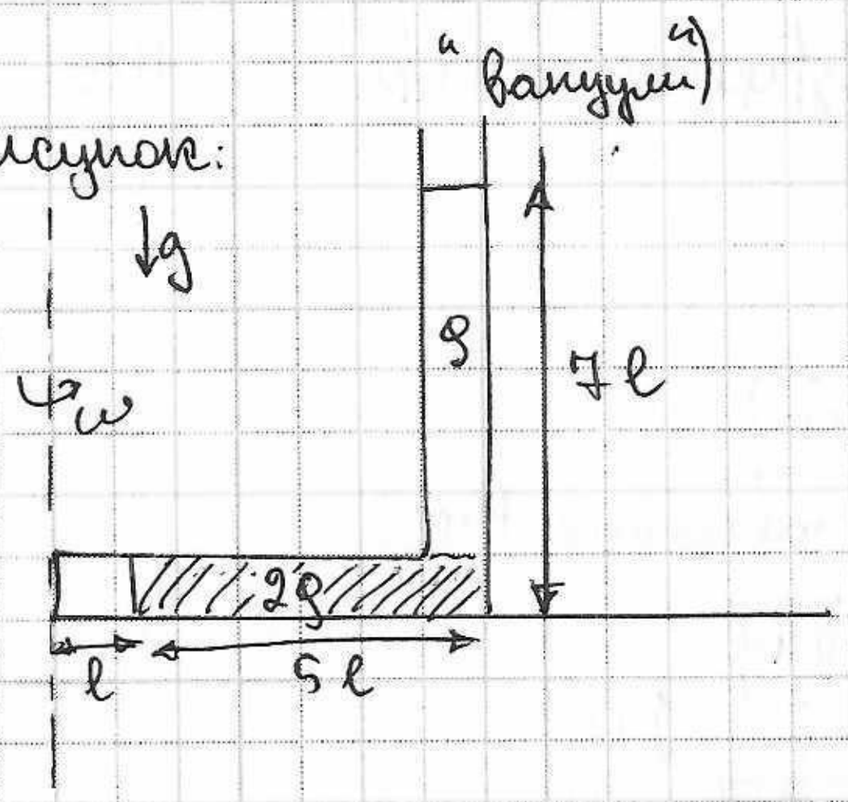
Дано:

$P_0 = 0$

ω : $\Delta l = l = ?$

T - const

Рисунок:



Решение:

1) Поймем что в начальный момент времени трубка не вращается, следовательно у нас есть единственное ускорение, направленное по вертикали — g. Тогда давление газа в нижней части трубки $P = 7\rho g l$

2) Будем считать, что воздух в нашей задаче идеальный газ и подчиняется закону Менделеева-Клайперона : $PV = \nu RT$, также поймем, что если в процессах вращения трубки воздух T - const => у нас выполняется закон Бойля - Мариотта : $PV = const$ ①

3) Тогда посмотрим на случай, когда все жидкости сместились на l: Объем, занимаемый газом ↗ на $l \cdot S$ => ↗ в 2 раза => его давление ①: ↘ в 2 раза.

4) Также Также давайте найдем, какое давление ρ будет действовать на газ: $7\rho g l + 2\rho g l - \int_{2l}^{\rho} \omega^2 r dr 2\rho = 0{,}5 P_0 = 0{,}5 \cdot 7\rho g l = 3{,}5\rho g l$

$\Rightarrow 5{,}5\rho g l = 2\int_{2l}^{\rho} \omega^2 r dr \rho = \omega^2 \frac{36l^2 - 4l^2}{2} = 16\omega^2 l^2 \Rightarrow$

$5{,}5 g = 16\omega^2 l \Rightarrow \omega^2 = \frac{5{,}5 g}{16 l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11}{64}\frac{g}{l}}$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{11}{64}\frac{g}{l}}$

Задача 6

Дано:

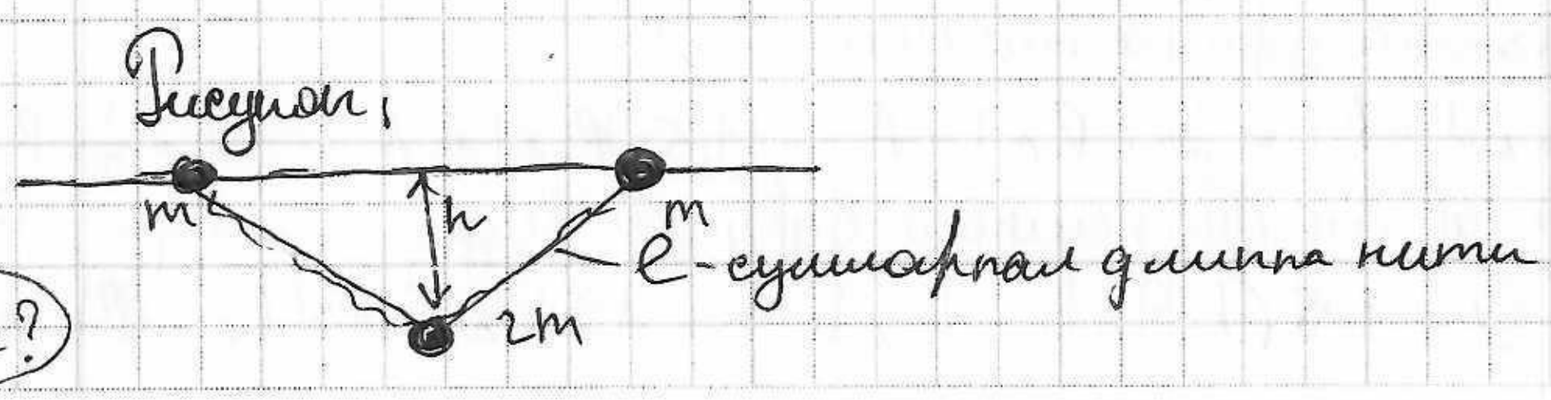
$l = 1{,}5$ м

$m = 0{,}1$ кг

$h = 0{,}45$ м

$T = ?$

Рисунок:

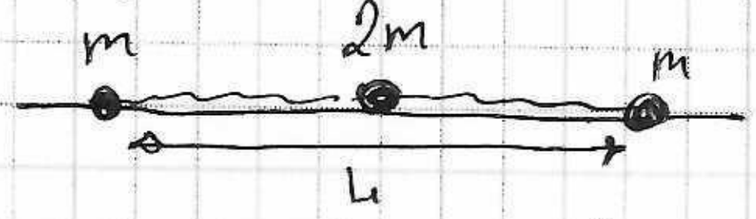


olymp.bmstu.ru

Вариант задания 2

Решение:

1) Заметим, что из рисунка следует, что начальное положение системы выглядит примерно так:



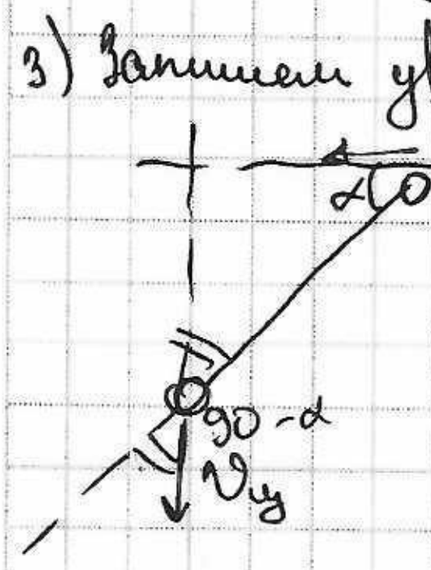
2) Запишем з-н сохранения энергии: сферы центральный бусин

$$2mgh = \frac{2mv_y^2}{2} + \frac{2mv_б^2}{2} = mv_y^2 + mv_б^2$$

↑ скорости боковых бусин

они одинаковы т.к. система симметрична относительно центра и силы действующие на крайние бусины одинаковы, а т.к. масса бусин равна, следовательно равны и ускорения, а следовательно и скорости через равные промежутки времени равны.

3) Запишем ур-ние кинематической связи на нить:



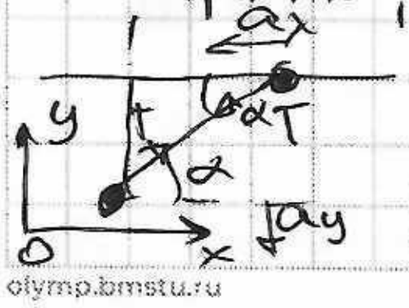
$$v_б \cdot \cos\alpha = v_y \cdot \cos(90-\alpha) = v_y \cdot \sin\alpha \quad (1)$$

Т.к. нить жесткая и нерастяжимая, а также при движении нижней бусинки под действием силы тяжести $2mg$ нить натянута, для док-ва этого факта можно рассмотреть малое перемещение нижнего шарика $dl = v_y \cdot dt$, тогда верхние за то же время dt должны сместиться на $v_б dt = dl' = dl$. $\cos\alpha$, а при $\alpha \to 0$ $\cos\alpha \to 1$

Факт можно сказать следующее: если в какой-то момент времени нить была натянута, то в послед. моменты времени нить будет натянута т.к. нижний груз ускоряется, и только затем ускоряется верхние грузы (их движение вынужденное) и не может быть ген-но большим, чем v_y (необходимым движением для осуществимости существования конструкции) $\Rightarrow$ при $\uparrow v_y$ $v_б$ тоже $\uparrow \Rightarrow$ есть Δl – есть $T \Rightarrow$ нить натянута.

4) Из ур-ния (1) следует, что проекции скоростей $v_б$ и v_y на нить равны, а т.к. это условие выполняется в каждый момент движения $\Rightarrow$ равны и проекции ускорений.

5) Введем систему координат OX; OY так, что OX направлена горизонтально, а OY ⊥ горизонтально.



Запишем II з-н Ньютона на центральный и одного из (II) крайних бусинок:

на центр. на правый

$$OX: \begin{cases} 2ma_б = T\cos\alpha - T\cos\alpha = 0 \\ 2ma_y = 2mg - 2T\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} ma_y = T\cos\alpha \\ ma_б = T\sin\alpha - N = 0 \end{cases}$$

б) Из системы ур-ний № ① и П.1 получим:

$2ma_y = 2mg - 2T\sin\alpha \quad :2 \Rightarrow ma_y = mg - T\sin\alpha$

$ma_x = T\cos\alpha$

$a_x\cos\alpha = a_y\sin\alpha \Rightarrow a_x = a_y\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ ~~$a_x = a_y\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$~~

$mg\operatorname{tg}\alpha - T\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = ma_x = T\cos\alpha$

$mg\operatorname{tg}\alpha = T\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$mg\operatorname{tg}\alpha = T\left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = T\,\frac{1}{\cos\alpha}$

$mg\sin\alpha = T \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{2h}{L}$

$T = mg\frac{2h}{L} = 0.6\ \text{Н}$

Ответ: $T = 0.6$ Н.

Ситуационная задача.

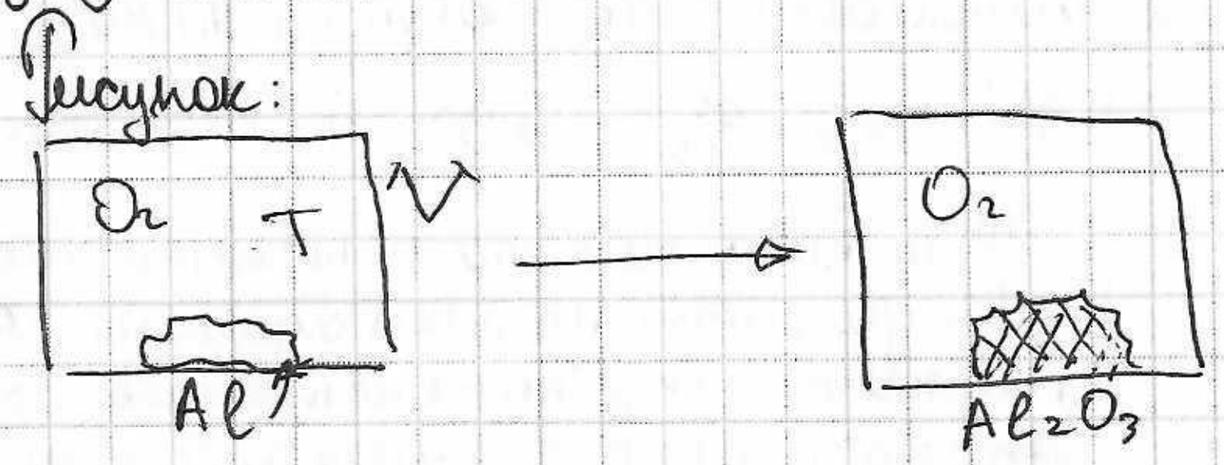
Дано:

$V = 1$ л

$m_{O_2} = 0.72$ г

$T = 293$ К

Рисунок:



Решение:

1) Запишем уравнение реакции: ~~$2Al + 3O_2 \to 2Al_2O_3$~~

$4\,Al + 3\,O_2 \longrightarrow 2\,Al_2O_3$

2) Если после сгорания должна остаться половина массы, то должно остаться половина от начального количества вещ-ва:

$n_{нач} = \frac{m_{нач}}{M[O_2]} = 0.0225$ моль, $\frac{n_{нач}}{2} = n'$ – кол-во вещества кислорода.

Для реакции $n[Al] : n[O_2] = 4 : 3 \Rightarrow n[Al] = \frac{4}{3}n[O_2] = \frac{4}{3}\cdot\frac{n_{нач}}{2} = \frac{2}{3}n_{нач}$

максимальная масса алюм.

$m_{Al} = n_{Al}\cdot M[Al] = \frac{2}{3}n_{нач}\cdot M[Al] = \boxed{0.405\text{ г} = m_{Al}}$

3) Запишем ур-ние состояния для кислорода: $PV = \nu RT$, V – const

4) Запишем ур-ние теплового баланса:

~~$Q_{ог}\cdot T_н + n_{Al_2O_3}\cdot T_н = n_{Al_2O_3}\cdot T_к + n_{O_2}T_к + Q_0\cdot C_{пр}$~~

olymp.bmstu.ru

2) Пойдем, что $V_{ле}$ и $V_{Al_2O_3}$ очень малы по сравнению с объемом камеры => их объемами можно пренебречь.

3,5) Запишем ур-ие теплового баланса сразу после реакции, будем считать, что она прошла очень быстро:

$$m_{O_2} \cdot C_{O_2} \cdot T_{нO_2} + m_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3} \cdot T_н = \left(m_{O_2} \cdot C_{O_2} + m_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3}\right) T_к + \frac{1}{5}\frac{m_{O_2}}{M[O_2]} \cdot Q_{дисс}$$

6) (Т.к. часть газа разложилась на молекулы => его итоговое давление в камере равно сумме парциальных давлений)

$$PV = \nu R T_к \Rightarrow P_i = \frac{\nu R T_к}{V} \Rightarrow P_{суммарное} = \frac{\frac{4}{5}\nu R T_к + \frac{9}{5}\nu R T_к}{V} =$$

($P_{суммарное}$ — давление газа; $\frac{4}{5}\nu$ — кол-во не дисс. газа; $\frac{9}{5}\nu$ — кол-во газа)

$$= \boxed{\frac{6}{5}\frac{\nu R T_к}{V} = P} \quad (1)$$

4) Посмотрим на ур-ие теплового баланса:

$$\nu_{O_2} \cdot m_{O_2} \cdot T_0 + m_{Al_2O_3} C_{Al_2O_3} \cdot T_н = \left(m_{O_2} \cdot C_{O_2} + m_{Al_2O_3} C_{Al_2O_3}\right) \cdot T_к + \frac{1}{5}\frac{m_{O_2}}{M[O_2]} Q_{дисс}.$$

Мы можем записать молярную теплоемкость Q_2 и Al_2O_3

$$\frac{\nu_{O_2} C_{O_2} T_0 + \nu_{Al_2O_3} C_{Al_2O_3} T_н - \frac{1}{5}\nu_{O_2} Q_{дисс}}{\nu_{O_2} \cdot C_{O_2} + \nu_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3}} = T_{кон.} \quad (11)$$

8) Подставим выражение (11) в выр-ние (1):

$$P = \frac{6}{5}\frac{R}{V}\nu_{O_2}\frac{\nu_{O_2} C_{O_2} T_0 + \nu_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3} T_н - \frac{1}{5}\nu_{O_2} Q_{дисс}}{\nu_{O_2} C_{O_2} + \nu_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3}} \quad (111)$$

9) Нам нужно максимизировать выражение (111) мы можем изменять $\nu_{Al_2O_3}$ и ν_{O_2}.

$\nu_{O_2} = \nu_{O_2 нач} - \underbrace{\nu_{O_2}'}_{\text{прореаг. } O_2} = \nu_{нач} - 1{,}5\,\nu_{Al_2O_3} \Rightarrow \boxed{\nu_{Al_2O_3} = \frac{2}{3}(\nu_{нач} - \nu_{O_2})}$

$\nu_{O_2}' : \nu_{Al_2O_3} = 3 : 2 \Rightarrow$

$\nu_{O_2}' = 1{,}5\,\nu_{Al_2O_3}$

10) Найдем молярные теплоемкости вещ-в O_2 и Al_2O_3

$C_{O_2} = C_{смеси} \cdot M[O_2] = 32 \frac{Дж}{моль \cdot К}$

$C_{Al_2O_3} = C_{Al_2O_3} \cdot M[Al_2O_3] = 122.4 \frac{Дж}{моль \cdot К}$

11) Перепишем $P(\nu_{O_2})$:

$$P = \frac{6}{5}\frac{R}{V}\nu_{O_2}\frac{\nu_{O_2}C_{O_2}T_0 + \nu_{инт}C_{al}T_н - \nu_{O_2}C_{al}T - \frac{1}{5}\nu_{O_2}Q}{\nu_{O_2}C_{O_2} + \nu_{инт}C_{al} - \nu_{O_2}C_{al}}$$

Добавим числа вместо $C_{O_2}, C_{al}, T_0, T_н, Q, \nu_{инт}$:

$$P = \frac{6}{5}\frac{R}{V}\nu_{O_2}\frac{-37144\ \frac{Дж}{моль}\cdot\nu_{O_2} + 281520\ \frac{Дж}{моль}\cdot\nu_{инт}}{-90.4\ \frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot\nu_{O_2} + 122.4\ \frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot\nu_{инт}}$$

$$P = \frac{6}{5}\frac{R}{V}\nu_{O_2}\frac{-37144\ \frac{Дж}{моль}\cdot\nu + 6334.2\ Дж}{-90.4\ \frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot\nu + 2754\ \frac{Дж}{К}}$$

Найдем ν_{O_2} когда производная $= 0$ (численно с помощью калькулятора)

$\nu_{O_2\,max} = 0.01026$ моль

$P_{O_2 max} = 14586$ Па ≈ 140 кПа

Ответ: $P_{max} = 140$ кПа